

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 11 februarie 2012

1. Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2012} < 1!$

2. Știind că numerele a și b sunt direct proporționale cu numerele 5 și 6, iar numerele b și c sunt invers proporționale cu numerele 3 și 4, arătați că : a) $a^2 + b^2$ nu este pătrat perfect ;
b) $b^2 + c^2$ este pătrat perfect.

3. a) Într-un șir sunt zece numere naturale nenule care satisfac proprietatea că, începând cu cel de-al treilea număr, fiecare dintre ele este egal cu suma celor două din fața lui. Să se afle suma celor zece numere, știind că cel de-al șaselea este 13.
b) Găsiți fracția ordinară cu numărătorul și numitorul pozitivi, echivalentă cu $\frac{19}{39}$, pentru care produsul dintre numărător și numitor să fie egal cu 11856.

4. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se notează cu G intersecția înălțimii [AD], $D \in (BC)$, cu bisectoarea (CE, $E \in (AB)$), iar $EF \perp BC$, $F \in (BC)$. a) Demonstrați că $\square AEC \equiv \square FEC$
b) Arătați că triunghiul AEG este isoscel
c) Arătați că patrulaterul AGFE este romb
d) Dacă (EH este bisectoarea unghiului FEB, determinați măsura unghiului CEH.

5. Fie ABCD un paralelogram în care $AD \perp BD$, $AD = 6\text{cm}$, M este mijlocul lui (CD), N este mijlocul lui (AB), $AM \cap BD = \{E\}$ și $CN \cap BD = \{F\}$. Dacă $EF = 6\text{cm}$, aflați aria paralelogramului ABCD.